Atti convegno "Parliamo tanto e spesso di didattica della matematica" (Pitagora editrice)
Castel san Pietro, 7 – 8 – 9 novembre 2014

Comprendere per apprendere in matematica
I risultati di una ricerca

Marisa Di Luca, Giorgio Bolondi, Ester Vitacolonna, Lucia Genovese
Istituto Istruzione Superiore A. Volta di Pescara, Università degli Studi di Bologna,
Università degli Studi G. D'Annunzio di Chieti-Pescara

Abstract. *The assumptions that are at the basis of this work, and represent the "guidelines" for this paper are*
a) Problems related to teaching / learning of mathematics
The process of teaching / learning is certainly one of the most delicate and complex. The issues related to teaching and learning are complicated significantly when it comes to mathematics. For long it has been a fundamental problem, now widely debated: the training of our students in precisely what Gauss called "The queen of sciences." The lack of interest in this discipline arises from the manner in which it is proposed. The more formal and strictly rigid aspects are privileged at the expense of those related to creativity and discovery, the more will be the guys who refuse.
b) The technology in the school
There is a strong resistance in part of teachers to use technology in teaching, and many are still strongly anchored to a more or less traditional teaching. But our kids (just called "digital natives") are making such a use of technology that often turns into "abuse", then what to do? We are experiencing a change that in some ways can be described as "epoch-making" that cannot be ignored.
c) The process of teaching / learning by competence
There is still no uniformity as to the meaning of the term "competence". It is not even clear what tests to be done to ascertain the acquisition, to assess and certify it.

1. Introduzione

In questi ultimi anni le indagini nazionali ed internazionali, come è noto, hanno messo in evidenza le difficoltà dei nostri studenti per quanto riguarda l'apprendimento della matematica, non soltanto dei suoi contenuti ma soprattutto degli aspetti procedurali; gli esiti sono deludenti. Anche nelle tanto temute prove INVALSI le cose non vanno meglio. Le difficoltà che sono emerse riguardano soprattutto gli aspetti procedurali piuttosto che quelli strettamente disciplinari.
Per quanto riguarda i contenuti in senso stretto i problemi dei nostri ragazzi si sono registrati nel campo della statistica e del calcolo delle probabilità, argomenti che solo in questi ultimi anni ricoprono un ruolo importante nelle nostre scuole. Il dibattito ha coinvolto tutti gli operatori scolastici e si sta cercando di capire come possono essere migliorate le competenze "di procedura" che, è evidente, sono alla base di un apprendimento consapevole e significativo della disciplina. Le difficoltà maggiori che sono state registrate riguardano l'area della "comprensione" di un testo. E' evidente che tali difficoltà condizionano non poco sia il processo di insegnamento che quello di apprendimento; docenti e studenti non posseggono lo stesso codice linguistico.
E' frequente sentire i nostri ragazzi dire di non aver saputo risolvere un problema perché hanno avuto difficoltà nella comprensione del testo ed anche molti insegnanti affermare "*Non capisce quel che legge*" o "*Non usa in modo puntuale il linguaggio ed i simboli …*".
La comprensione della lettura coinvolge due componenti essenziali: il **TESTO** e il **LETTORE.** Pertanto due sono i punti di vista da considerare: quelle delle caratteristiche intrinseche del testo stesso (struttura, contenuti, ...) e quello dei processi che hanno luogo nella mente del lettore.
Siamo di fronte ad un processo di interazione (la lettura) fra le caratteristiche del testo (dal punto di vista della sua complessità e difficoltà ai fini della comprensione, comprensibilità) e le capacità di comprensione proprie del lettore (livello di conoscenze ed esperienze, padronanza del codice, famigliarità con l'argomento, ...).

Essere in grado di saper "decodificare" un messaggio risulta fondamentale non solo per l'apprendimento a scuola, ma anche, e soprattutto, per un'acquisizione autonoma di nuovi saperi al di fuori del contesto scolastico. Eppure il mondo della scuola solo in questi ultimi anni ha compreso l'importanza di questa competenza; gli insegnanti hanno sempre dato per scontato l'avvenuta comprensione. Uno studente ha svolto in maniera esatta il compito assegnato? Quindi ha capito. Non è così ci possono essere tantissime motivazioni per cui una corretta esecuzione potrebbe non corrispondere ad una comprensione consapevole.
Qualsiasi sia la tipologia della consegna, è necessario che lo studente sia in possesso del codice per decodificare il messaggio ed, eventualmente, per codificarlo qualora gli sia chiesto di produrre una elaborazione partendo dal testo stesso. Alla base pertanto di un apprendimento che sia davvero significativo sicuramente la comprensione e la produzione di un testo ricoprono un ruolo cruciale, costituiscono una delle competenze irrinunciabili. Ma nella scuola italiana come già detto in precedenza spazio alla comprensione (e alla produzione) non ne è stato mai dato molto soprattutto in matematica. Nelle linee guida della riforma si trovano frasi/verbi quali: *confrontare, rappresentare*, *individuare,* ovvio che queste "azioni" prevedono prima la fase del comprendere un testo espresso in qualsiasi forma: testuale, iconica, grafica, tabellare, … Inoltre, le Indicazioni Nazionali per il primo ciclo in diversi punti sottolineano l'importanza, ai fini dell'acquisizione delle competenze linguistiche, del lavoro svolto sulla comprensione dei testi nelle ore delle altre discipline.
Altro aspetto importante che attraversa tutti gli ordini scolastici è quello della competenza che rappresenta il raccordo tra le conoscenze, le abilità, le capacità personali. La sua definizione è "una questione complessa, come si vede dal dibattito sviluppatosi intorno a queste tematiche, soprattutto se dal campo professionale ci si sposta a quello della scuola" (Genovese, 2008).
Si può comunque affermare che una persona è "competente" quando:

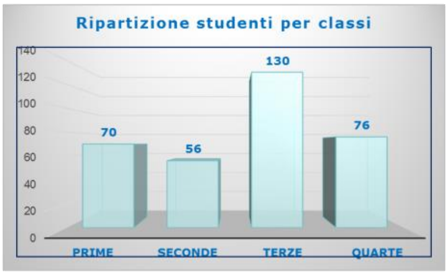
a) interpreta, decodifica la situazione da affrontare
b) progetta le strategie che lo portano alla soluzione
c) prende decisioni coerenti
d) porta a termine il processo

quindi quando un soggetto è perfettamente in grado di gestire una situazione problematica! Una didattica per problemi è particolarmente adatta in un insegnamento per competenze.
Il problem posing e il problem solving ricoprono un ruolo di primo piano nel dibattito sull'insegnamento/apprendimento della matematica oggi. Ma attenzione al reale significato dei termini. Da sempre in matematica il problema è stato uno degli strumenti per l'accertamento del profitto; sono stati sempre trascurati tutti gli aspetti a "contorno" e quasi mai il problema è stato il punto di partenza e non finale del processo. Di fronte ad uno studente non a suo agio con il problema non si riusciva ad individuare dove fossero le difficoltà: nel testo o negli aspetti strettamente matematici? Inoltre, quando chiediamo ai nostri studenti di risolvere un problema siamo sicuri di ciò che viene loro proposto oppure chiediamo loro di risolvere un esercizio "travestito" da problema? D'Amore e Bolondi chiariscono molto bene le reali differenze tra un esercizio ed il problema.
«Si ha un esercizio quando la risoluzione prevede che si debbano utilizzare regole e procedure già apprese, anche se ancora in corso di consolidamento. Gli esercizi dunque rientrano nella categoria delle prove a scopo di verifica immediata o di rafforzamento».
«Si ha invece un problema quando una o più regole o una o più procedure non sono ancora bagaglio cognitivo del risolutore; alcune di esse potrebbero essere proprio in quell'occasione in via di esplicitazione; a volte è la successione stessa delle operazioni risolventi a richiedere un atto creativo da parte del risolutore». (D'Amore, 1999)
Il problema, quello vero, pretende che lo studente si impegni in tutta serie di passi che lo portano alla soluzione e lo costringono alla riflessione critica sul processo seguito.

Bolondi (2005) definisce il problema come "*situazione in cui si presenta una domanda a cui bisogna dare una risposta costruendo una strategia risolutiva che utilizza anche strumenti di aritmetica, geometria, logica …*"
Altro nodo cruciale nella didattica oggi è l'utilizzo della tecnologia. I ragazzi ne fanno molto uso, i docenti un po' meno; c'è bisogno di far incontrare i due mondi se non vogliamo che il gap si allarghi sempre più. Lo strumento tecnologico (hardware e software) è al tempo stesso ambiente di apprendimento, strumento di mediazione didattica, mediatore semiotico radicalmente differente da quelli tradizionali. Inoltre, la tecnologia è particolarmente adatta per una impostazione di una didattica laboratoriale e per problemi (Bolondi, 2006). Ma per gli studenti utilizzare la tecnologia vuol dire soprattutto essere veloci, arrivare subito al punto e questo crea molti problemi all'apprendimento che, soprattutto in matematica, esige riflessione quindi tempo.
Nel progetto di ricerca che verrà descritto in seguito la tecnologia utilizzata è l'E-Learning.
L'utilizzo del WEB, in questo caso una piattaforma E-Learning, come risorsa ha contribuito alla nascita di vere e proprie "comunità" (le classi virtuali) con scambio di idee, informazioni, opinioni, quindi non solo gli studenti hanno appreso, ma hanno contribuito alla costruzione all'interno delle proprie classi di una "comunità" che ha vissuto un'esperienza relazionale diversa.
Mammarella focalizza molto bene come l'E-Learning possa essere un supporto utile alla didattica; in essa "rientrano gli apprendimenti **delle tecnologie** e gli apprendimenti **mediati dalla tecnologia**, come l'apprendimento a distanza o quello on-line" (Mammarella, 2005)
Il "gruppo classe" si trasforma in una "comunità" intesa come "gruppo allargato", la classe non può più essere isolata, ma deve superare il confine delle proprie mura. Pierre Lèvy parla di "intelligenza collettiva": nascono comunità che basano la loro esistenza proprio sullo scambio e sulla condivisione di conoscenza e che sviluppano, quindi, apprendimento. Inoltre "Condividendo obiettivi e lavoro si oltrepassa la dimensione individuale riuscendo a percepirsi, seppur a distanza, come membro di una comunità" (Eletti, 2009).

2. Il progetto

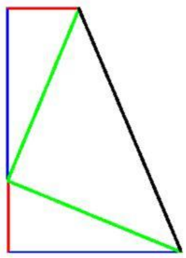
Tenendo conto di quanto illustrato in precedenza è stata progettata e realizzata un'attività basata sull'utilizzo di una piattaforma E-Learning completamente dedicata alla didattica per competenze in matematica.La piattaforma utilizzata è ILIAS, un prodotto open source web-based; questo spazio virtuale è stato utilizzato sia dai docenti che dagli studenti ognuno con propri modi di interazione con la tecnologia.
Il progetto di ricerca è stato spalmato sui due anni scolastici 2011/12 e 2012/13; il primo è stato impostato come "studio pilota" al fine di individuare con il gruppo dei docenti: a) le tematiche su cui si sarebbe lavorato l'anno successivo, quindi individuazione dell'area delle competenze; b) l'assetto generale dello spazio virtuale.
Per quanto riguarda la metodologia è stata scelta la Ricerca/Azione (metodo qualitativo) perché particolarmente adatta ad un contesto scolastico in virtù delle sue caratteristiche: partecipazione attiva dei protagonisti, contestualizzazione, sistematicità, circolarità tra teoria e pratica.
Al primo anno hanno partecipato 26 docenti e 213 studenti. In questa prima fase ogni docente ha liberamente scelto se accreditare o no studenti ed, eventualmente, quali. Questo ha permesso anche di far emergere in alcuni casi le paure e le insicurezze degli insegnanti riguardo all'uso degli strumenti.
Al termine dell'anno scolastico 2011/12 sono state prese, dal gruppo, le seguenti decisioni: a) ogni docente avrebbe accreditato una classe per impostare meglio il lavoro in modo da tenerne conto nella valutazione; b) il tema sarebbe stato "la comprensione e la produzione" di un testo matematico. I protagonisti della ricerca nell'anno scolastico 2012/13 sono stati 14 docenti e 332 studenti. Ogni insegnante ha segnalato una classe e solo un docente ne ha indicate due motivo per cui le classi sono complessivamente 15. Il grafico seguente mostra la ripartizione degli studenti per grado scolastico.



Gli obiettivi generali del progetto volevano andare a sondare gli atteggiamenti di docenti e studenti nei confronti sia della tecnologia sia di alcuni aspetti della disciplina che non erano mai stati affrontati nella didattica in classe.

3. Le prove in piattaforma

Le esercitazioni inserite in piattaforma sono state predisposte partendo da contenuti non noti agli studenti, conoscerli avrebbe dato loro la possibilità di rispondere per inferenza. La loro struttura non risponde ai canoni dei classici "esercizi", ma sono prove abbastanza lunghe, complesse, inedite, adatte ad una didattica per competenze. Si tratta di vere situazioni problematiche in cui lo studente ha dovuto mettere in atto strategie di problem solving. I contenuti "matematici" specifici che hanno fatto "da ingrediente" alle esercitazioni sono stati le costruzioni con riga e compasso, la statistica, il teorema di Pitagora, il principio di induzione, i numeri complessi, i numeri irrazionali, i numeri primi, gli insiemi, le strutture algebriche.
In un primo momento era stata fatta distinzione fra biennio e triennio, poi i docenti hanno scelto di non tener conto di questa suddivisione. Ovviamente cambiano gli obiettivi: ad esempio per quanto riguarda "Gli insiemi" – prova scelta sia nel biennio sia nel triennio - per un docente del primo anno costituisce un argomento curriculare, per uno del terzo può essere considerato un ripasso prima di affrontare le strutture algebriche. Vediamo alcuni esempi di prove. Di seguito un estratto dalla prova sul teorema di Pitagora che, ovviamente, non proponeva dimostrazioni classiche e nel cui testo non c'era alcun riferimento specifico a tale teorema. Il punto di partenza è l'osservazione quindi la decodifica della figura:



La consegna:

Passo n. 1

Osserva: nella figura di sopra ci sono due triangoli rettangoli uguali con i cateti: blu che misura **b** e rosso che misura **a**; l'ipotenusa è in verde e misura **c**

Passo n. 2

Si uniscono poi gli estremi delle ipotenuse, e si ottiene un trapezio. Quali sono le misure della base maggiore: ________________, della base minore: ________________, dell'altezza: ________________?

Passo n. 3

Il triangolo con i due cateti verdi (che misurano c) è un triangolo rettangolo ________________

Passo n. 4

A questo punto possiamo dire che l'area del trapezio che calcolata secondo la formula

____

equivale alla somma delle aree dei tre triangoli, quindi:

$$\frac{(a+b)^2}{2} = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{c^2}{2} \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$

Prova a motivare le conclusioni al passo n. 4 ____
Abbiamo trovato una relazione fra a, b, c. Tale relazione ti ricorda un teorema di geometria? Quale?
Sapresti ricavare l'ipotesi? ____
E la tesi? ____
Sapresti scrivere il suo enunciato? ____
Come hanno risposto gli studenti? Quasi tutti hanno completato correttamente il cloze, ma quasi nessuno ha individuato l'ipotesi e la tesi del teorema, non hanno capito che si trattava del teorema di Pitagora. Alla richiesta di scrivere il testo del teorema gli studenti hanno semplicemente riscritto quanto riportato nei passi precedenti, per loro il testo è la dimostrazione! La stessa situazione si è avuta con il teorema che dimostra l'irrazionalità della $\sqrt{2}$ e quello sull'infinità dei numeri primi, vediamo una parte della prova sugli irrazionali.

La consegna:

Prova a ricostruire la giusta sequenza delle frasi in modo da avere un testo coerente.

Q1. Elevando al quadrato si ha $\frac{a^2}{b^2} = 2$, cioè $a^2 = 2b^2$.

Q2. Poiché abbiamo ottenuto una contraddizione con l'assunzione che $\sqrt{2}$ sia un numero razionale, essa deve essere falsa. Dunque abbiamo dimostrato l'opposto, cioè che $\sqrt{2}$ è irrazionale.

Q3. Supponiamo che $\sqrt{2}$ sia un numero razionale.

Q4. Questo implica che a^2 è pari, e che quindi a è pari, ossia esiste k intero tale che $a=2k$. Sostituendo abbiamo

$$a^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2b^2 \Rightarrow b^2 = 2k^2$$

cioè anche b è pari, e quindi a e b hanno in comune un fattore 2, il che è impossibile perché li avevamo assunti privi di fattori comuni.

Q5. Ciò comporta che esistono due interi a e b privi di fattori comuni tali che $a/b = \sqrt{2}$.

L'ordine corretto per le frasi è: ____

a) individua l'ipotesi ____
b) individua la tesi: ____

Sapresti scrivere il suo enunciato?

Quasi la totalità ha ricostruito la giusta sequenza, probabilmente aiutati da verbi (*supponiamo*) o da altri termini (*quindi, se tale N fosse*), ma alla richiesta di individuare l'ipotesi e la tesi del teorema le cose non sono andate bene.

Il lavoro di docenti e studenti si è svolto completamente on-line. La piattaforma è stata organizzata in due aree: una riservata ai docenti e una agli studenti. Questi ultimi, collegandosi, scaricavano l'esercitazione e inserivano la soluzione entro i tempi stabiliti oltre il quale non era più possibile inviare. Gli insegnanti potevano controllare il lavoro dei loro studenti inviando, ad esempio, sul loro desktop la valutazione, alcune osservazioni e altro come si vede dallo schema seguente.

4. I risultati

Come hanno lavorato gli insegnanti e i ragazzi? Al biennio l'atteggiamento dei partecipanti è stato "tiepido"; il 35% degli studenti ha inserito soluzioni ma soprattutto sia i docenti che gli studenti non hanno costruito una "community" , si sono limitati ad utilizzare la piattaforma come "banca dati" , un'alternativa al libro di testo. Al triennio le cose sono andate meglio: il 65% dei ragazzi ha lavorato e anche i docenti sono riusciti nella maggior parte dei casi a costruire una comunità "in parallelo" alla vita di classe. Da mettere in evidenza che è stato inserito il 71% delle soluzioni attese, quindi un buon risultato. Le analisi che sono state eseguite al termine della ricerca hanno riguardato: i voti che i docenti hanno dato a fine anno, le valutazioni delle prove in piattaforma, i tempi di connessione, il numero delle soluzioni inserite su quelle richieste dai docenti; queste informazioni sono state analizzate singolarmente e messe in correlazione fra loro. In dettaglio:

Riepilogo	Maschi	Femmine	Generale
Media voti docente	**6,67**	**6,94**	**6,8**
Deviazione standard voti docente	**1,45**	**1,39**	**1,43**
Media voti prove in piattaforma	**6,32**	**6,86**	**6,57**
Deviazione standard voti prove in piattaforma	**1,63**	**1,43**	**1,56**
Mediana voti docente	**7**	**7**	**7**
Mediana voti prove in piattaforma	**6,5**	**7**	**6,5**

Esaminando i valori in tabella, possiamo dire che tra le valutazioni riportate nelle prove in piattaforma e quelle dei docenti non c'è una grossa differenza per quanto riguarda i valori medi, ma una deviazione standard minore nelle valutazioni dei docenti ci dice che questi ultimi sono più omogenei rispetto agli altri. Il valore della mediana maggiore della media per quanto riguarda i voti dei docenti ci dice che le valutazioni in questo caso sono distribuite in maggior parte alla destra della media, quindi verso i voti più alti. Alcune osservazioni interessanti si possono ricavare dalle correlazioni; per l'analisi è stato utilizzato l'indice di Bravais-Pearson che può assumere valori tra -1 (correlazione negativa o inversa) e+1 (correlazione positiva o diretta). Per un valore che si colloca tra 0 e 0.3 si dice che non c'è correlazione, tra 0.3 e 0.5 si parla di correlazione debole, moderata per valori tra 0.5 e 0.7 e forte quando il coefficiente è maggiore di 0.7. Di seguito viene riportata la tabella per quanto riguarda il biennio.

BIENNIO	MASCHI	FEMMINE	GENERALE
Voti docente - Voti prove	**0,1**	**0,22**	**0,22**
Voti prove - Tempi di connessione	**-0,2**	**-0,5**	**-0,3**
Tempi di connessione - N. soluzioni inserite	**0,5**	**0,7**	**0,6**

E’ evidente che tra le valutazioni dei docenti e quelle prove in piattaforma non c’è una correlazione significativa; il dato interessante e che per certi versi dà da pensare è quello relativo alle ragazze: si registra un valore negativo apri a -0.5 che indica il sussistere di una relazione inversa di grado moderato.
In conclusione dell’attività è stato chiesto ai protagonisti – docenti e studenti - di rispondere ad alcune domande per cercare di capire come avevano “vissuto” questa esperienza.
Esaminando le risposte al questionario finale, si evince che sicuramente i ragazzi gradiscono usare la tecnologia a scuola, ma, spesso, la loro visione è puramente “ludica”; non sono ancora pronti (forse dovrebbero essere preparati, guidati dai docenti) all’utilizzo non puramente “tecnicistico” dello strumento, ma piuttosto ad un uso riflessivo, consapevole che dia loro la capacità di “scegliere” quale tecnologia e in quale contesto. Anche per i docenti l’utilizzo di una piattaforma risulta essere utile, ma la loro visione è un po’ diversa da quella dei loro studenti e, sicuramente, non proprio quella che dovrebbe essere. Gli insegnanti vedono questo spazio come un supporto si, ma di che tipo? Alcune delle risposte tipiche sono del tipo: “*per i compiti*”, “*per i recuperi*”; si intuisce che non hanno la percezione di uno spazio diverso dall’aula in cui costruire una “learning community” con gli studenti e dove affrontare argomenti diversi da quelli in classe. Per quanto riguarda la disciplina: la maggior parte degli studenti non si è trovata a proprio agio con la tipologia di prove; hanno scritto: “*mancano i numeri*”, “*c’è troppa teoria*”, “*ci sono pochi esempi*”. Questo cosa ci dice? Che la matematica viene insegnata, quindi appresa, come la disciplina “*delle formule*”, “*delle regole da applicare*”, “*dei numeri*” e non come “*disciplina che coinvolge le procedure, il problem posing e solving*”!

Bibliografia

Bolondi G. (2005), *La matematica quotidiana*
Bolondi G. (2006), *Metodologia e didattica: il laboratorio. Numero speciale dedicato alla Didattica della matematica. Rassegna*, vol. n. 29, 59-64
D’Amore B. (1999), *Elementi di didattica della matematica*
Eletti V. (2009), *Che cos’è l’E-Learning*
Genovese L. (2008), *Insegnare e apprendere. Temi e problemi della didattica*
Mammarella N. Cornoldi C. e Pazzaglia F. (2005), *Psicologia dell’apprendimento multimediale*

Parole chiave: comprensione, competenza, tecnologia, problem solving, learning community